K O D

ZADANIE	1	2	3	4	5	SUMA PUNKTÓW
PUNKTACJA						
Podpis sprawdzającego						

KONKURS MATEMATYCZNY

dla uczniów gimnazjum
w roku szkolnym 2009/2010

I etap zawodów (szkolny)
15 października 2009 r.

Witamy w Konkursie

- Otrzymujesz do rozwiązania 5 jednakowo punktowanych zadań. Za poprawne rozwiązanie każdego zadania możesz uzyskać 8 punktów.
- Rozwiązując każde zadanie zapisz obliczenia, potrzebne uzasadnienie i odpowiedź.
- Pisz czarnym lub niebieskim długopisem albo piórem. Ołówka używaj tylko do wykonywania rysunków.
- Nie używaj korektora, błędy przekreślaj.
- Podczas pracy nie możesz używać kalkulatora.
- Na rozwiązanie wszystkich zadań masz 60 minut.
- Aby zakwalifikować się do etapu rejonowego musisz uzyskać co najmniej 34 punkty.

Życzymy powodzenia!

Zadanie 1.
W trapezie $ABCD$ o podstawach długości $|AB| = 11$ i $|CD| = 3$ oraz ramionach długości $|AD| = 9$ i $|BC| = 7$ poprowadzono wysokości DE i CF. Niech $|AE| = x$, $|BF| = y$, $|CF| = |DE| = h$. Oblicz długość odcinków x i y oraz wysokość h.
(wykonaj rysunek pomocniczy)

Zadanie 2.
Na zewnątrz równoległoboku $ABCD$, na jego bokach zbudowano kwadraty. Udowodnij, że środki symetrii tych kwadratów, także tworzą kwadrat.
(wykonaj rysunek pomocniczy)

Zadania 3.
Suma cyfr jedności i setek szukanej liczby trzycyfrowej wynosi 15. Jeżeli cyfry tej liczby napiszesz o odwrotnej kolejności, to otrzymasz liczbę o 297 większą od poszukiwanej. Gdybyś zaś przed cyfrą setek szukanej liczby dopisał 7, to nowo utworzona liczba czterocyfrowa byłaby o 1151 większa od liczby czterocyfrowej, jaką otrzymałbyś, dopisując na końcu szukanej liczby cyfrę 8. Wyznacz poszukiwaną liczbę.

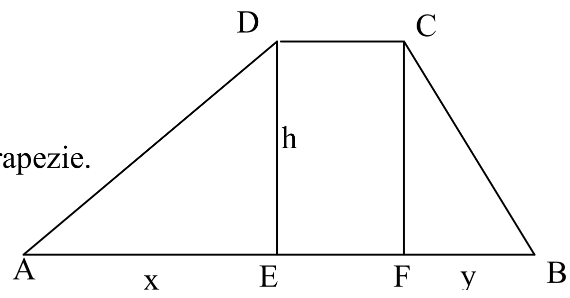
Zadania 4.
Rozwiąż równanie: $|x-1| + 3x = x^2 + 2$.

Zadania 5.
W prostokącie jeden z boków skrócono a drugi wydłużono o x %, gdzie x jest liczbą pierwszą. W wyniku tego pole prostokąta zmniejszyło się o mniej niż 2%. Wyznacz liczbę x. Rozpatrz wszystkie możliwe rozwiązania.

MODEL ODPOWIEDZI

Zadanie 1.

1 pkt.
Wykonanie rysunku z oznaczeniami.



2 pkt.
Zapisanie zależności między odcinkami w trapezie.
$x + y = 11 - 3$

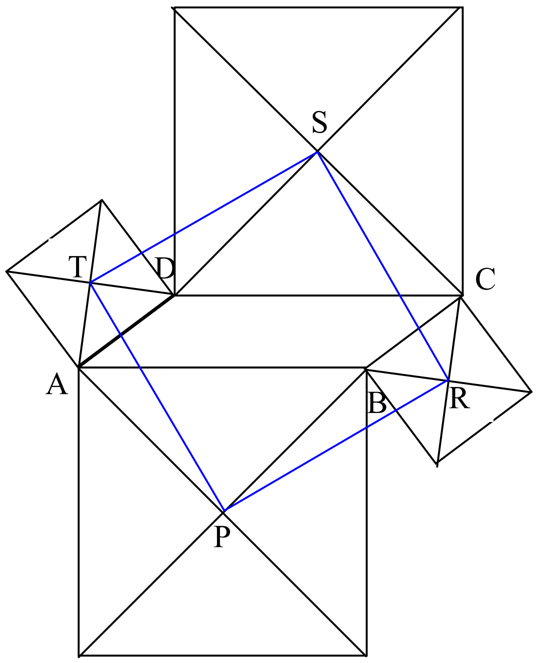
$$\begin{cases} x^2 + h^2 = 9^2 \\ y^2 + h^2 = 7^2 \end{cases}$$

3 pkt.
Wyznaczenie wielkości x i y.

Po odjęciu stronami lub podstawieniu za h^2 otrzymujemy
$x^2 - y^2 = 32$
i zastosowaniu wzoru skróconego mnożenia
$(x + y)(x - y) = 32$
i podstawieniu otrzymujemy
$8(x - y) = 32$
po rozwiązaniu układu równań
$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 4 \end{cases}$$
otrzymujemy
$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$$

2 pkt.
Wyznaczenie wysokości h z jednego z równań
$h^2 = 45$ więc $h = 3\sqrt{5}$

Zadanie 2.



1 pkt.
Wykonanie rysunku wraz z oznaczeniami.

Punkty *P,R, S, T* są środkami kwadratów.

1 pkt.
Zauważenie, że trójkąty: *PRB, SRC, STD, PTA* są przystające.

2 pkt.
Podanie cechy przystawania *bkb* oraz wskazanie odpowiednich boków równych:
$|RB| = |RC| = |TD| = |TA|$ i $|CS| = |SD| = |AP| = |PB|$
oraz odpowiednich kątów przystających:
$|\sphericalangle PBR| = |\sphericalangle RCS| = |\sphericalangle SDT| = |\sphericalangle TAP|$

1 pkt.
Zauważenie, że boki: *PR, RS, ST, TP* przystających trójkątów leżą naprzeciw równych kątów, więc są równe.
To znaczy, że boki czworokąta *PRST* są równe.

2 pkt.
Zbadanie rozwartości kątów wewnętrznych czworokąta *PRST.*
$|\sphericalangle RST| = |\sphericalangle CSD| + |\sphericalangle DST| - |\sphericalangle RSC| = |\sphericalangle CSD| = 90^\circ$
oraz $|\sphericalangle STP| = |\sphericalangle DTA| + |\sphericalangle DTS| - |\sphericalangle PTA| = |\sphericalangle DTA| = 90^\circ$

1 pkt.
Stwierdzenie, że czworokąt *PRST* jest kwadratem, bo boki ma tej samej długości, a kąty wewnętrzne równe po 90°.

Zadania 3.

3 pkt.
Przyjęcie oznaczeń i ułożenie układu równań

x – cyfra setek - $x \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
y – cyfra dziesiątek - $y \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
z – cyfra jedności - $z \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$$\begin{cases} x + z = 15 \\ 100x + 10y + z = 100z + 10y + x - 297 \\ 7 \cdot 1000 + 100x + 10y + z - 1151 = 1000x + 100y + 10z + 8 \end{cases}$$

4 pkt.
Poprawne rozwiązanie układu równań.

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \\ z = 9 \end{cases}$$

1 pkt.
Podanie poprawnej odpowiedzi: 649.

<u>Zadania 4.</u>

1 pkt.
Podanie założenia $x-1<0$ i odpowiedniego równania:
$-(x-1)+3x=x^2+2$

2 pkt.
Rozwiązanie nierówności $x<1$
oraz równania:
$x^2-2x+1=0$
$(x-1)^2=0$
$x=1$

1 pkt.
Stwierdzenie niezgodności rozwiązania z założeniem.

1 pkt.
Podanie założenia $x-1\geq 0$ i odpowiedniego równania:
$x-1+3x=x^2+2$

2 pkt.
Poprawne rozwiązanie nierówności $x\geq 1$
oraz równania:
$x^2-4x+3=0$
$x^2-3x-x+3=0$
$x(x-3)-(x-3)=0$
$(x-1)(x-3)=0$
$x=1$ lub $x=3$

1 pkt.
Stwierdzenie zgodności rozwiązań z założeniem.

<u>Zadania 5.</u>

3 pkt.
Przyjęcie oznaczeń i zapisanie nierówności zgodnie z treścią zadania.

a, b – wymiary prostokąta

$P_1 = ab$ – początkowe pole powierzchni prostokąta
$P_2 = \left(a - \frac{x}{100}a\right)\left(b + \frac{x}{100}b\right)$ - pole powierzchni prostokąta po zmianie wymiarów

$P_1 - P_2 < 0{,}02P_1$

$ab - \left(a - \frac{x}{100}a\right)\left(b + \frac{x}{100}b\right) < 0{,}02ab$

3 pkt.
Poprawne przekształcenie nierówności do postaci
$x^2 < 200$

2 pkt.
Podanie wszystkich możliwych rozwiązań: 2, 3, 5, 7, 11, 13.

W przypadku, gdy uczeń nie poda wszystkich rozwiązań:
podanie czterech lub pięciu rozwiązań - **1 pkt.**
podanie mniej niż czterech rozwiązań - **0 pkt.**